

## 基于场对齐质心 Voronoi 划分的四边网格生成

杜兴逸<sup>1)</sup>, 严冬明<sup>2)</sup>, 叶军涛<sup>2)</sup>, 张 慧<sup>1)\*</sup>

<sup>1)</sup>(清华大学软件学院 北京 100084)

<sup>2)</sup>(中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室 北京 100190)  
(huizhang@tsinghua.edu.cn)

**摘要:** 为了生成高质量的四边网格, 提出一种基于场对齐质心 Voronoi 划分(centroidal Voronoi tessellation, CVT)优化的四边网格生成方法. 首先通过优化 CVT 能量函数将输出网格顶点均匀地分布在输入网格表面; 然后利用场对齐 CVT 优化得到网格边与输入方向场对齐的三角网格; 再通过网格边-场方向匹配初步提取四边网格, 并基于拓扑模式进行奇异点的识别与消除; 最后利用三角形配对得到准四边网格. 实验结果表明, 该方法能够生成对齐方向场且质量较高的准四边网格.

**关键词:** 四边网格; CVT; 方向场; 拓扑优化

**中图法分类号:** TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2017.16689

## Quad Mesh Generation via Field-Aligned Centroidal Voronoi Tessellation

Du Xingyi<sup>1)</sup>, Yan Dongming<sup>2)</sup>, Ye Juntao<sup>2)</sup>, and Zhang Hui<sup>1)\*</sup>

<sup>1)</sup>(School of Software Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084)

<sup>2)</sup>(National Laboratory of Pattern Recognition (NLPR), Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

**Abstract:** In order to generate high quality quad mesh, a novel method based on field-aligned centroidal Voronoi tessellation (CVT) is proposed. Target mesh vertices are first uniformly distributed on input mesh surface via CVT optimization. Then, field-aligned CVT is applied to align mesh edges to the underlying direction field. Next, an initial quad mesh is extracted by matching mesh edges and field directions. Meanwhile, singular vertices are detected and eliminated based on topology optimization. Finally, the output quad-dominant mesh is generated by merging adjacent triangle pairs. Experiments show that our method has the ability to generate field-aligned high quality quad-dominant mesh.

**Key words:** quad mesh; centroidal Voronoi tessellation; directional field; topology optimization

网格表示法是一种重要的三维几何形体表示方法, 在几何建模、计算机图形学、模拟计算等领域具有广泛应用. 由于四边网格具有良好的整体结构和单元性质, 在动画、纹理、有限元模拟等应用中具有独特优势<sup>[1]</sup>. 相比于三角网格, 四边网格在形状和拓扑上具有更多的限制, 其自动生成是

一个具有挑战性的问题, 近年来得到了广泛的关注和研究.

不同的应用场景对四边网格提出了多样的要求, 其中网格边取向控制对于许多应用具有重要意义. 目前, 具有取向控制能力的四边重网格化方法主要是基于方向场的全局参数化方法. 为了计算

收稿日期: 2017-06-30; 修回日期: 2017-09-18. 基金项目: 国家自然科学基金(61373070, 61772523, 61372168, 61379096); 国家科技支撑计划(2015BAF23B03); 广东省科技计划(2014A050503004). 杜兴逸(1993—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为重网格化; 严冬明(1979—), 男, 博士, 副研究员, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为计算机图形学、数字几何处理; 叶军涛(1972—), 男, 博士, 副研究员, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为计算机图形学、虚拟现实; 张 慧(1974—), 女, 博士, 副教授, 博士生导师, 论文通讯作者, CCF 会员, 主要研究方向为计算机图形学、计算机辅助几何设计.

全局参数化,这类方法通常需要将输入模型切开,从而带来了切缝处参数化一致性的问题.现有方法通常只能近似求解一致性问题,而且难以保证得到双射的参数化映射<sup>[2]</sup>.

本文将一种三角重网格化方法——场对齐 CVT(field-aligned centroidal Voronoi tessellation, FCVT)方法<sup>[3]</sup>扩展到四边网格生成,提出一种无需参数化、直接迭代优化生成四边网格的方法.简单应用 FCVT 方法得到的四边网格具有较多奇异点和三角形,网格质量较差,而直接在最终网格上应用拓扑优化又会影响网格方向对齐.为此,本文提出了一种基于网格边-场方向匹配的拓扑优化算法,能够在优化拓扑的同时,促进方向对齐,提高最终四边网格的质量.

## 1 相关工作

四边网格生成问题可以分为四边转化和四边重网格化 2 大类<sup>[2]</sup>.四边转化方法通过修改网格顶点连接关系,将输入三角网格转化为四边网格,其常用方法是将相邻三角形配对构成四边形.四边转化得到的四边网格很大程度上受输入三角网格的影响,灵活性低,网格质量通常较差.四边重网格化方法在输入曲面上重新采样网格顶点,以得到质量更高的四边网格.关于四边网格生成方法的详细介绍请读者参考相关综述<sup>[1-2]</sup>.

与本文最相近的方法是基于方向场的四边重网格化方法与从 CVT 方法<sup>[4]</sup>衍生出的  $L_p$ CVT 法<sup>[5]</sup>.下面分别介绍这 2 种方法.

基于方向场的四边重网格化方法显式地使用方向场控制四边网格的局部性质,指导四边网格的生成.一般来说,方向场可以分解为取向场和尺寸场,分别控制四边形的取向和尺寸.这类方法一般包括生成取向场、生成尺寸场、在取向场和尺寸场指导下生成四边网格 3 步<sup>[2]</sup>.

第 3 步方法不同,其可以进一步分为直接法与全局参数化法.早期,直接法通过跟踪方向场的流线<sup>[6]</sup>生成与方向场基本一致的四边网格.Lai 等<sup>[7]</sup>提出的直接法首先重采样输入曲面,得到与尺寸场基本一致的采样点分布;然后迭代地优化采样点位置,使网格边尽量与取向场一致;最后使用四边转化方法提取四边网格.由于缺乏对去网格全局拓扑的考虑,直接法通常只能得到准四边网格,而

且难以有效地控制奇异点的数量和分布.

全局参数化方法首先沿曲线将输入曲面切开,得到一个或多个具有盘形拓扑的区域,然后计算一个参数化映射,将曲面映射到二维平面区域上,从而将曲面四边化转化为简单的平面区域四边化问题.基于场的方法要求参数化梯度尽可能与场方向对齐,从而间接地控制四边网格的取向和尺寸.全局参数化方法的关键在于保证切缝两侧参数化的一致性,以使得生成的四边网格在跨越割线时平滑过渡.Ray 等<sup>[8]</sup>借助周期函数处理一致性,但对奇异点附近的区域需要进行特别处理.Kälberer 等<sup>[9]</sup>和 Bommes 等<sup>[10]</sup>基于方向场将该一致性约束转化为整数线性方程,从而将四边化问题转化为混合整数求解问题,该方法能够更好地对齐取向场并且显式控制奇异点.除了基于方向场的方法,还有一类方法基于 Morse-Smale 复形理论<sup>[11]</sup>,通过寻找合适的莫尔斯函数解决四边重网格化问题.Dong 等<sup>[12]</sup>使用网格 Laplace 矩阵的某些特征向量作为莫尔斯函数生成四边网格;Huang 等<sup>[13]</sup>随后改进了该方法,实现了四边网格的特征对齐,方向和密度控制.

本文同样使用方向场控制网格边取向,但在方法上更接近直接法<sup>[7]</sup>.不同之处在于,本文基于 FCVT 优化<sup>[3]</sup>.这是一种各向同性三角重网格化方法,其在 CVT 优化基础上加入了场对齐能量,以促进网格边与输入取向场对齐.此外,相比 Lai 等<sup>[7]</sup>方法,本文对于方向场限制较小,不限于主曲率场或交叉场.与本文相似, $L_p$ CVT 法<sup>[5]</sup>也是一种基于 CVT 的四边网格生成方法,它将传统 CVT 能量中的  $L_2$  距离推广为一般的  $L_p$  距离,使得四边形 Voronoi 胞成为一种稳定的构型.该方法使用各向异性场控制网格的取向和尺寸性质,最终通过三角形配对提取四边网格,得到方向对齐的准四边网格.

瞬时场对齐(instant field-aligned meshing, IFM)方法<sup>[14]</sup>是一种基于场的重网格化方法,它首先使用局部迭代生成输入网格顶点处的取向场,然后以取向场为约束,在每个顶点处计算局部参数化(位置场),并使用局部迭代对位置场进行光滑,最后从位置场提取输出网格.因为局部迭代效率低,且容易陷入局部极小,IFM 法使用了由粗到细的层次化策略加以优化.本文以 IFM 方法生成的取向场作为输入,但与 IFM 相比,本文不涉及局部参数化,而是直接优化输入顶点位置,而且本文的

CVT 能量项能够促进单元质量, 避免出现极端尖锐角.

## 2 理论背景

### 2.1 FCVT

为了使生成的网格边对齐用户给定的方向场, FCVT 优化在 CVT 能量基础上加入场对齐能量项. 给定输入三角网格  $\mathcal{M}$  以及  $\mathcal{M}$  上的采样点集  $X$ , FCVT 能量<sup>[3]</sup>函数定义为,  $E_{\text{total}} = E_{\text{CVT}} + \lambda E_{\text{field}}$ ; 其中,  $E_{\text{CVT}}$  为 CVT 能量函数,  $E_{\text{field}}$  为场对齐能量,  $\lambda \geq 0$  为用户指定的混合参数. 对于网格曲面  $\mathcal{M}$ , CVT 能量定义为

$$E_{\text{CVT}}(X) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_{i\mathcal{M}}} \rho(x) \|x - x_i\|^2 d\sigma.$$

其中,  $\Omega_{i\mathcal{M}}$  为采样点  $x_i$  对应的受限 Voronoi 胞<sup>[15]</sup>, 定义为  $x_i$  的三维 Voronoi 胞与网格面  $\mathcal{M}$  的交集;  $\rho(x) > 0$  为用户指定的密度函数. 本文只考虑  $\rho$  为常数, 即均匀采样的情况. 受限 Voronoi 胞的对偶三角网格称为受限 Delaunay 三角化(restricted Delaunay triangulation, RDT), 其给出了输入网格的重网格化结果.

场对齐能量<sup>[3]</sup>计算 RDT 的网格边方向对方向场的偏离程度, 其形式为

$$E_{\text{field}}(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} w_{ij} \cdot D_{ij} \quad (1)$$

其中,  $\mathcal{N}(i)$  为采样点  $x_i$  的邻居点集合,  $w_{ij}$  为网格边  $e_{ij}$  的权重,  $D_{ij}$  为边  $e_{ij}$  与  $x_i$  处方向场的方向距离. 本文使用拟牛顿法(LBFGS<sup>[16]</sup>)优化 FCVT 能量, 该方法需要计算能量梯度. 梯度推导及场对齐能量的更多细节请读者参考文献[3].

### 2.2 旋转对称方向场

FCVT 方法使用旋转对称方向场控制网格边方向.  $N$  旋转对称场( $N$ -RoSy)在网格面的每个点  $x$  处定义  $N$  个方向, 这些方向都落在过  $x$  的切面上, 并且相邻方向之间的夹角为  $2\pi/N$ . 本文采用 4 旋转对称场(4-RoSy)进行网格边方向控制, 首先使用外场光滑算法<sup>[14]</sup>计算网格  $\mathcal{M}$  所有顶点处的方向场, 然后利用对称方向插值<sup>[3]</sup>得到其他位置的方向场.

### 2.3 拓扑优化

使用 FCVT 通常只能得到局部最优解, 导致输出网格中存在过多的奇异点. 这些奇异点在导致

网格局部质量降低的同时, 使得局部网格边数量与方向场的旋转对称次数不匹配, 从而影响网格方向对齐.

拓扑优化有助于消除多余奇异点, 同时帮助优化算法跳出局部极小点, 得到质量更高的网格. 然而, 将现有四边网格拓扑优化算法直接加入 FCVT, 存在 2 个问题. 首先, 现有拓扑优化算法一般缺乏对于方向场对齐的考虑, 因此在拓扑优化过程中难免导致方向对齐程度降低. 其次, FCVT 方法中网格拓扑本质上是根据 Delaunay 法则确定的, 即网格拓扑完全取决于采样点几何位置. 因此, 诸如边翻转这样的常见的拓扑优化操作, 由于不改变采样点几何位置, 并不适用于该问题.

本文观察到, 与 FCVT 优化的局部最优性对应的主要是这样一类多余奇异点. 这些奇异点既不来源于方向场本身的奇异性, 也不来源于模型形状尺寸的变化. 它们通常成对出现, 并且与局部区域内采样点的过剩或不足紧密相关. 此外, 在这些奇异点附近, 方向场对齐程度也相对较差. 基于以上观察, 本文提出了一种基于网格边-场方向匹配(简称边场匹配)的拓扑优化算法, 首先计算边场匹配, 得到每条网格边对应的场方向; 然后, 利用匹配信息提取一个具有缺陷的四边网格, 其中的缺陷同时对应于网格奇异点和边场失配; 最后, 在该网格中, 多余奇异点被识别, 并通过适当的局部增删采样点操作进行自动消除.

本文提出的拓扑优化算法充分考虑了方向场对齐的要求, 并且仅使用增删采样点的方式, 可以有效地用于 Delaunay 网络的拓扑优化问题.

## 3 本文方法

如图 1 所示, 本文四边网格生成方法流程如下:

输入: 三角网格  $\mathcal{M}$

输出: 四边网格  $\mathcal{Q}$

Step1. 在  $\mathcal{M}$  上随机初始化采样点.

Step2. CVT 优化, 使采样点分布均匀.

Step3. FCVT 优化, 使网格边对齐方向场.

Step4. 计算边场匹配.

Step5. 计算可行拓扑操作. 如果没有可行操作, 则执行下一步; 否则, 执行拓扑操作, 转 Step3.

Step6. FCVT 优化, 平滑拓扑操作带来的网格扭曲.

Step7. 如果分辨率不够高, 在所有边的中点处插入采样点, 转 Step3; 否则, 执行下一步.

Step8. 配对三角面, 提取四边网格  $\mathcal{Q}$ .

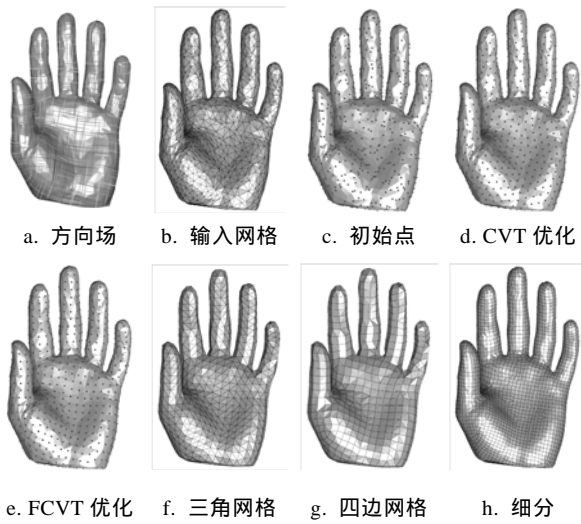


图 1 算法流程示意

算法的关键在于边场匹配算法以及建立在其基础之上的拓扑优化方法。

### 3.1 网格边-场方向匹配

为了进行拓扑优化, 并且保证拓扑优化不与方向对齐的要求相悖, 需要显式计算网格边与场方向的匹配. 本文将有限集合  $S$  到  $T$  的匹配定义为映射  $M: S \rightarrow T$ , 记  $M(S)$  为  $T$  中被匹配元素的集合.

本文关心的是一个采样点关联的网格边方向集合到该点处场方向集合的匹配. 规定网格边方向为网格边在采样点处切平面上投影的方向, 从而将问题简化为两组共面方向集合的匹配. 考虑到问题的几何含义, 匹配应具有单射性和保序性. 单射性要求不同边必须匹配不同的场方向; 保序性要求当逆时针一周访问所有边时, 相应的被匹配场方向也构成逆时针访问序列.

匹配单射性的前提是场方向数量不少于边数量. 当该条件不满足时, 本文使用图 2 所示方法逐次扩展方向场, 直到有足够的场方向与网格边匹配.

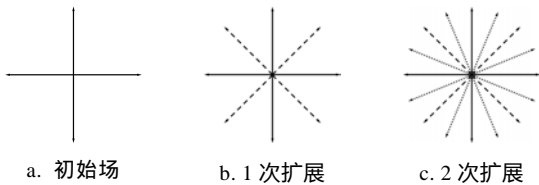


图 2 场方向扩展

每次扩展新产生的方向位于原有方向的角平分线处. 第  $n$  次扩展新产生的场方向称为  $n$  阶场方向, 最初的场方向为 0 阶场方向. 阶数同时也给出了场方向的优先度, 阶数越低, 优先度越高. 一般地, 给定集合  $T$  及定义在其上的优先度映射

$P: T \rightarrow \mathbb{R}$ , 优先度最高的元素组成 0 阶子集  $T_0$ , 优先度次高元素组成 1 阶子集  $T_1$ , 以此类推. 而  $T_{\leq k} = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_k$  表示所有阶数不大于  $k$  的元素的集合. 本文要求匹配时优先考虑低阶场方向, 即在最终匹配中, 如果方向  $q$  被匹配, 则所有优先度大于  $q$  的方向也必须被匹配. 匹配优先性的严格定义如下:

定义. 对于匹配  $M: S \rightarrow T$  和优先度映射  $P: T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M$  满足优先性, 当且仅当任取  $p, q \in T$ , 如果  $P(p) < P(q)$  且  $p \in M(S)$ , 则  $q \in M(S)$ .

满足单射性、保序性和优先性的匹配称为可行匹配. 记所有  $S$  到  $T$  的可行匹配组成的集合为  $\Psi_S^T$ ,  $C: \Psi_S^T \rightarrow \mathbb{R}$  为匹配的代价泛函, 最优匹配定义为使  $C$  取最小值的可行匹配. 对于本文的方向对齐问题, 一个合理的代价为

$$C(M) = \sum_{s \in S} \langle s, M(s) \rangle^2, M \in \Psi_S^T.$$

其中, 尖括号表示 2 个方向的夹角. 通过遍历所有可行匹配, 计算代价值, 可求出最优匹配. 然而, 由于可行匹配的数量通常不少(例如, 假设优先度都相同, 从  $S$  到  $T$  的可行匹配数量为  $|S| \cdot C_{|S|}^{|T|}$ ), 精确计算最优匹配的时间复杂度过高. 为此, 本文提出一种贪心的近似算法. 简洁起见, 在下面的算法描述中, “下一个方向”, “之后方向”指按逆时针方向遇到的下一个方向; 反之, “前一个”, “之前”表示顺时针; “从  $a$  到  $b$  的方向”指的是从方向  $a$  按逆时针到  $b$  的过程中遇到的所有方向(含  $a$  和  $b$ , 除非特别指明). 此外, 算法中的“结束”相当于程序中的返回语句.

本文匹配算法流程如下:

输入. 方向集合  $S$  和  $T$ , 优先度映射  $P: T \rightarrow \mathbb{R}$ .

输出. 可行匹配  $M: S \rightarrow T$ .

Step1. 从  $S$  和 0 阶子集  $T_0$  中找出夹角最小的一对方向  $s_0$  和  $t_0$ , 匹配  $s_0$  和  $t_0$ , 即令  $M(s_0) = t_0$ . 分别从  $S$  和  $T$  中去除  $s_0$  和  $t_0$ .

Step2. 如果  $|S| = 0$ , 结束; 否则, 更新  $s_0$  为  $S$  中  $s_0$  的下一个方向, 更新  $t_0$  为  $T$  中  $t_0$  的下一个方向.

Step3. 如果  $|S| \geq |T_0|$ , 执行下一步; 否则,  $|S| < |T_0|$ . 在不破坏匹配可行性的前提下, 在  $T_0$  中找到与  $s_0$  夹角最小的方向  $t_1$ , 匹配  $s_0$  和  $t_1$ . 从  $S$  中删除  $s_0$ , 从  $T$  中删除  $t_0$  到  $t_1$  的所有方向. 更新  $t_0 = t_1$ . 转 Step2.

Step4. 如果存在正整数  $k$ , 使得  $|T_{\leq k}| < |S| < |T_{\leq k+1}|$ , 执行下一步; 否则, 一定存在非负整数  $k$ , 使得  $|S| =$

$|T_{\leq k}|$ . 从  $s_0$  和  $t_0$  开始, 依次匹配  $S$  和  $T_{\leq k}$  中的方向, 结束.

Step5. 设  $T_{\leq k+1}$  中优先级最高的方向的集合为  $T_{\leq k+1}^*$ , 找到  $T_{\leq k+1}^*$  中  $t_0$  的下一个方向  $t_1$ . 在不破坏可行性的前提下, 在  $S$  中找到与  $t_1$  夹角最小的方向  $s_1$ , 匹配  $s_1$  与  $t_1$ . 记  $S_{0 \rightarrow 1}$  为  $S$  中从  $s_0$  到  $s_1$  (不含) 的方向集合,  $S_{1 \rightarrow 0}$  为  $S$  中从  $s_1$  (不含) 到  $s_0$  (不含) 的方向集合,  $T_{0 \rightarrow 1}$  为  $T$  中从  $t_0$  到  $t_1$  (不含) 的方向集合,  $T_{1 \rightarrow 0}$  为  $T$  中从  $t_1$  (不含) 到  $t_0$  (不含) 的方向集合.

Step6. 更新  $s_0$  为  $s_1$ , 更新  $t_0$  为  $t_1$ . 从 Step2 开始, 调用本算法分别求  $S_{0 \rightarrow 1}$  到  $T_{0 \rightarrow 1}$  的匹配和  $S_{1 \rightarrow 0}$  到  $T_{1 \rightarrow 0}$  的匹配; 结束.

上述算法中的“不破坏匹配可行性”需要进一步阐明. 在 Step3 中,  $|S| < |T_0|$ , 根据匹配的优先性,  $T$  中只有 0 阶方向可能被匹配. 为了保证后续匹配依然可行, 必须给之后匹配的  $S$  方向预留足够的 0 阶方向. 如图 3 所示, 方向用方块表示, 方向集合表示为方块序列,  $T_0$  的后半段为预留区域,  $s_0$  只能在前半段寻找夹角最小的方向  $t_1$ .

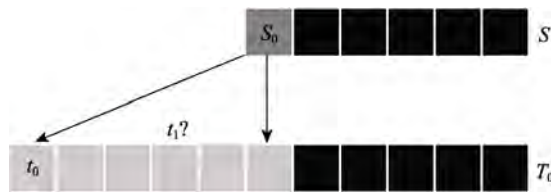


图 3 单一优先级时的预留

类似地, 在 Step5 中, 为了“不破坏可行性”, 也需要预留. 这时,  $|T_{\leq k}| < |S| < |T_{\leq k+1}|$ , 根据匹配的优先性,  $T_{\leq k}$  中的方向都会被匹配, 而  $T_{k+1}$  中只有  $|S| - |T_{\leq k}|$  个方向被匹配. 图 4 所示例子中,  $T_{\leq k+1}$  分为黑色的  $T_{\leq k}$  和深灰色的  $T_{k+1}$ . 在  $S$  中寻找与  $t_1$  夹角最小的  $s_1$  时, 考虑到后续两侧必须匹配的黑色方向, 在  $S$  的两端都预留了 2 个元素. 其次, 由于  $|S|=8$ ,  $|T_{\leq k}|=5$ ,  $S$  中必然有 3 个方向匹配  $T_{k+1}$  中的方向 (深灰色). 由于  $t_1$  右侧只有 2 个深灰色元素,  $S$  左半段 ( $s_1$  左侧) 至少要预留一个元素匹配深灰色方向; 因此,  $s_1$  只能从图 4 中浅灰色元素中选取.

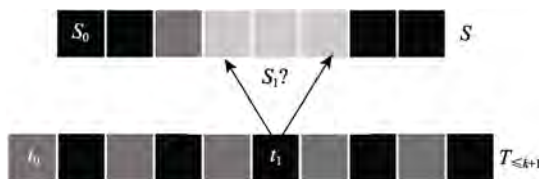


图 4 多种优先级时的预留

### 3.2 拓扑优化

根据边场匹配信息, 可以提取一个带有缺陷的网格, 其中网格顶点包含所有采样点, 而网格边只包含与 0 阶场方向匹配的边. 图 5 展示了三角网格和相应的提取后的网格.

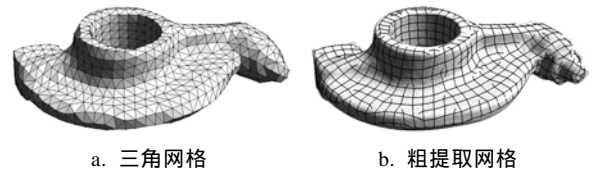


图 5 粗提取四边网格

下面把提取前的三角网格称为  $T_{out}$ , 提取后网格称为  $Q_{out}$ . 可以看到, 网格  $Q_{out}$  中存在一些只连接了一个顶点的悬空边, 它们对应于  $T_{out}$  网格中只在一个端点处和 0 阶场方向匹配的边. 具体来说, 对于  $T_{out}$  中连接  $v_i$  和  $v_j$  的边  $e_{ij}$ , 如果  $e_{ij}$  在  $v_i$  处与 0 阶场方向匹配, 而在  $v_j$  处不与 0 阶场方向匹配, 则在  $Q_{out}$  中  $e_{ij}$  变为一条连接  $v_i$  的悬空边.

悬空边既对应于目标四边网格的奇异点 (如 T 结点), 也是场方向对齐失配的位置. 因此, 针对悬空边进行拓扑优化, 可以同时优化奇异点和方向对齐. 本文观察到, 可优化的悬空边可以归结为若干模式. 一种模式通常包含一对空间邻近, 取向相反的悬空边, 可以通过局部插入或删除采样点的方式进行消除. 图 6 展示了本文使用的几种模式. 其中, 菱形点为待插入的点, 叉点为待删除的采样点. 拓扑优化后, 可以消除一对悬空边.

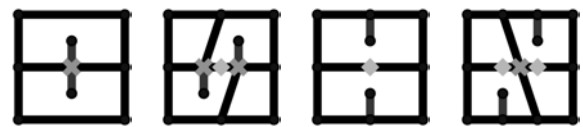


图 6 拓扑优化的模式

拓扑优化算法遍历  $Q_{out}$  网格中的所有悬空边, 并在其附近搜索上述模式, 最后对找到的模式执行相应的增删采样点操作.

## 4 实验结果与分析

本文实验的环境配置为 Win10 64 位操作系统, 4 核 3.20 GHz Intel Core i5 CPU, 16GB 内存; 旋转对称方向场使用 Instant Mesh 软件<sup>[14]</sup>计算, 使用

MeshLab 软件<sup>[17]</sup>配对三角形生成最终的四边网格.

### 4.1 实验结果

图 7 显示了对 hand 模型进行 FCVT 优化的中间过程和结果, 初始网格为 CVT 优化得到的各向同性三角网格, 三角形大多接近等边三角形. 开始 FCVT 优化后, 网格边向场方向对齐, 使得相邻三角形对趋近于矩形.

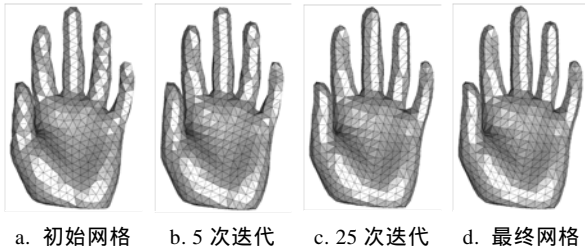


图 7 FCVT 优化过程

对于同一网格模型, 本文比较 CVT 法, 不使用拓扑优化的 FCVT 法和使用拓扑优化的 FCVT 法得到的准四边网格. 图 8 显示了不同方法生成网格的实验结果, 可以看出, CVT 法由于缺乏方向对齐控制, 不能得到接近正方形面片的四边网格. 单纯的 FCVT 优化可以使大部分网格边对齐方向场, 然而由于优化的局部最优性, 提取的四边网格中包含大量奇异顶点和非四边形. 加入拓扑优化后, 大部分多余奇异点被消除了, 最终得到的四边网格包含的三角形较少, 质量得到提高.

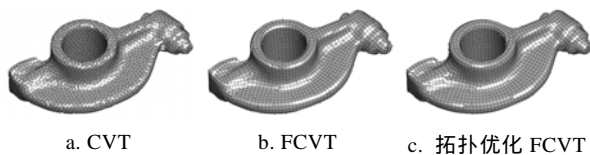


图 8 不同方法得到的四边网格

表 1 定量比较了使用拓扑优化与不使用拓扑优化所得到的网格的质量, 其中四边形质量  $Q$  使用文献<sup>[18]</sup>的方法计算, 其中考虑了四边形平面性, 最优质量值为 1;  $v_4$  是规则点(4 价顶点)的比率,  $f_4$  为四边形面占有所有面的比率. 从表 1 可以看出, 拓扑优化对网格质量有较大提升.

表 1 拓扑优化与网格质量

拓扑优化	$Q_{avg}$	$\theta_{min}$	$\theta_{max}$	$v_4/\%$	$f_4/\%$
优化前	0.83	26.3	168.5	88.3	90.4
优化后	0.83	43.0	155.7	92.5	93.5

### 4.2 权值选取

根据式(1), 方向对齐能量为所有网格边的能量的加权和. 本文将边权设定为该网格边在受限 Voronoi 图<sup>[15]</sup>中对偶边所对应的 Voronoi 区域的 CVT 能量, 如图 9 所示.

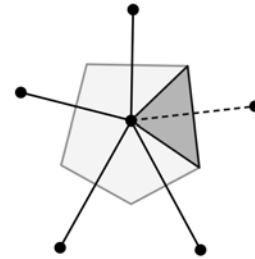


图 9 网格边的 Voronoi 对偶区域

由于方向距离函数没有量纲, 这样的权值设定可以保证对模型进行伸缩变换时, 2 个能量项的相对大小保持不变. 这样一来, 对于均匀四边网格生成问题, 本文方法基本上不需要调整混合参数  $\lambda$ . 为了选择最优混合参数, 本文采用不同混合参数进行优化, 比较生成网格的质量. 在不同模型和分辨率下, 网格质量与混合参数的关系, 如图 10 所示. 可以看出, 随着混合参数增大, 网格平均质量先增大, 然后趋于稳定, 而网格最小角有下降趋势. 综合考虑, 本文实验中选取  $\lambda = 1$ .

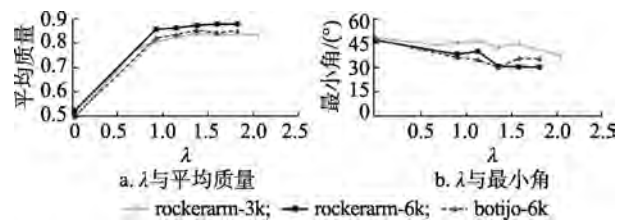


图 10 权重  $\lambda$  与网格质量

### 4.3 比较

$L_p$ CVT 方法<sup>[5]</sup>与本文类似, 同样基于 CVT 和方向场指导生成准四边网格. IFM 法<sup>[14]</sup>与本文使用同一种方向场, 但后续生成四边网格的策略不同. 图 11 显示了 3 种方法生成的准四边网格.

表 2 所示为 3 种方法所生成网格质量的定量比较结果, 可以看出, 本文方法生成网格的质量与  $L_p$ CVT 法接近, 但奇异点与非四边形的比率通常更小; IFM 法包括取向场优化、位置场优化、网格提取 3 个步骤, 其与另 2 种方法在原理上差异较大. 从结果来看, IFM 法生成的网格在平均质量上有一定优势, 但在最大角和最小角方面与本文方法有

较大差距. 此外, 在一些情况下, IFM 法不能正确地提取网格, 而本文方法可以得到合理的结果, 如图 12 所示 elk 模型.

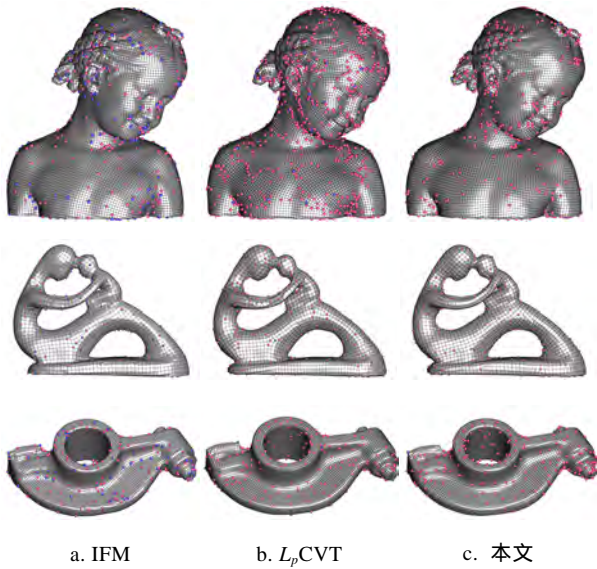


图 11 3 种方法生成的四边网格

表 2 生成网格的质量比较

模型	方法	$ V $	$Q_{avg}$	$\theta_{min}$	$\theta_{max}$	$v_4/\%$	$f_4/\%$
bimba	IFM	13k	<b>0.88</b>	24.8	180.0	92.5	<b>96.4</b>
	$L_p$ CVT	13k	0.84	<b>39.2</b>	170.0	91.3	92.3
	本文	13k	0.83	37.6	<b>166.5</b>	<b>95.2</b>	95.6
fertility	IFM	4k	<b>0.88</b>	18.8	172.2	90.0	<b>95.5</b>
	$L_p$ CVT	4k	0.84	40.0	161.1	91.1	92.7
	本文	4k	0.83	<b>40.2</b>	<b>155.0</b>	<b>92.9</b>	94.2
rockerarm	IFM	9k	<b>0.91</b>	18.4	180.0	93.9	<b>97.2</b>
	$L_p$ CVT	9k	0.90	40.9	159.4	<b>95.9</b>	96.3
	本文	9k	0.88	<b>43.8</b>	<b>151.0</b>	95.7	96.0

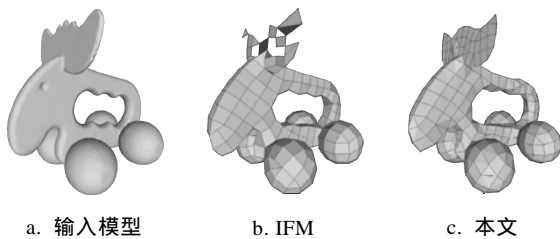


图 12 elk 模型四边网格生成结果

图 13 从效率角度比较了 IFM,  $L_p$ CVT 与本文方法, 以 botijo 模型(约 8000 三角面)为输入, 比较了 3 种方法在不同目标采样点数下的运行时间. 可以看出, 运行时间均随采样点数增加线性增长. 本文方法与  $L_p$ CVT 法效率接近, 而 IFM 法速度更快.

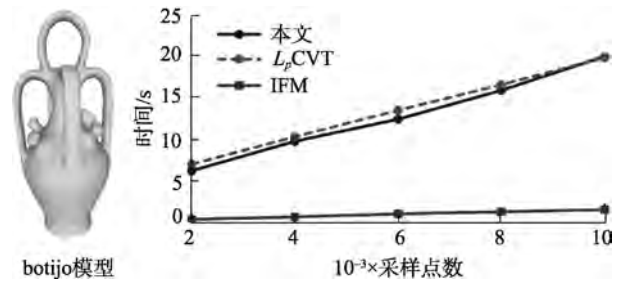


图 13 3 种方法对 botijo 模型的运行时间

## 5 结 语

本文通过扩展 CVT 优化, 加入方向场控制, 提出了一种融合 CVT 和方向场对齐的新的四边网格生成方法. 该算法结合了 2 种方法的优点, 能够生成质量较高且方向可控的准四边网格. 在解决网格拓扑优化问题过程中, 提出一种匹配 2 组共面方向的算法, 其中综合考虑了匹配的单射性、保序性、优先性与算法效率. 基于网格边与场方向的匹配信息, 提出了一种同时优化奇异点和方向对齐的拓扑优化方法, 能够在一定程度上解决优化的局部最优性问题, 提高网格质量. 通过与相近方法的比较, 验证了本文方法的有效性. 目前, 拓扑优化仅使用 4 种最简单的拓扑模式, 开发更多的拓扑模式或使用一种更为统一的拓扑优化方法是下一步的研究方向.

## 参考文献(References):

- [1] Huang Jin, Jiang Tengfei, Bao Hujun. Research progress on automatic quadrilateral and hexahedral remeshing[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2015, 27(8): 1354-1362(in Chinese)  
(黄 劲, 江腾飞, 鲍虎军. 四边形与六面体自动重网格化技术研究综述[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015, 27(8): 1354-1362)
- [2] Bommès D, Lévy B, Pietroni N, et al. Quad-mesh generation and processing: a survey[J]. Computer Graphics Forum, 2013, 32(6): 51-76
- [3] Du X Y, Liu X H, Yan D M, et al. Field-aligned isotropic surface remeshing[OL]. [2017-06-30] <http://www.nlpr.ia.ac.cn/ivc/project/fieldcvf/>
- [4] Du Q, Faber V, Gunzburger M. Centroidal voronoi tessellations: applications and algorithm[J]. SIAM Review, 1999, 41(4): 637-676
- [5] Lévy B, Liu Y.  $L_p$  centroidal voronoi tessellation and its applications[J]. ACM Transactions on Graphics, 2010, 29(4): Article No.119
- [6] Alliez P, Cohen-Steiner D, Devillers O, et al. Anisotropic polygonal remeshing[J]. ACM Transactions on Graphics, 2003,

- 22(3): 485-493
- [7] Lai Y K, Kobbelt L, Hu S M. An incremental approach to feature aligned quad dominant remeshing[C] //Proceedings of ACM Symposium on Solid and Physical Modeling. New York: ACM Press, 2008: 137-145
- [8] Ray N, Li W C, Lévy B, *et al.* Periodic global parameterization[J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(4): 1460-1485
- [9] Kälberer F, Nieser M, Polthier K. Quadcover - surface parameterization using branched coverings[J]. Computer Graphics Forum, 2007, 26(3): 375-384
- [10] Bommes D, Zimmer H, Kobbelt L. Mixed-integer quadrangulation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2009, 28(3): Article No.77
- [11] Edelsbrunner H, Harer J, Zomorodian A. Hierarchical morse complexes for piecewise linear 2-manifolds[J]. Nineteenth Symposium on Computational Geometry, 2001, 30 (1): 70-79
- [12] Dong S, Bremer P T, Garland M, *et al.* Spectral surface quadrangulation[J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(3): 1057-1066
- [13] Huang J, Zhang M Y, Ma J, *et al.* Spectral quadrangulation with orientation and alignment control[J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(5): Article No.147
- [14] Jakob W, Tarini M, Panozzo D, *et al.* Instant field-aligned meshes[J]. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(6): Article No.189
- [15] Yan D M, Lévy B, Liu Y, *et al.* Isotropic remeshing with fast and exact computation of restricted voronoi diagram[J]. Symposium on Geometry Processing, 2009, 28(5): 1445-1454
- [16] Liu D C, Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization[J]. Mathematical Programming, 1989, 45(3): 503-528
- [17] Cignoni P, Corsini M, Ranzuglia G. MeshLab: an open-source 3D mesh processing system[J]. ERCIM News, 2008, 73: 45-46
- [18] Joe B. Shape measures for quadrilaterals, pyramids, wedges, and hexahedra[OL]. [2017-06-30]. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.577.5216>